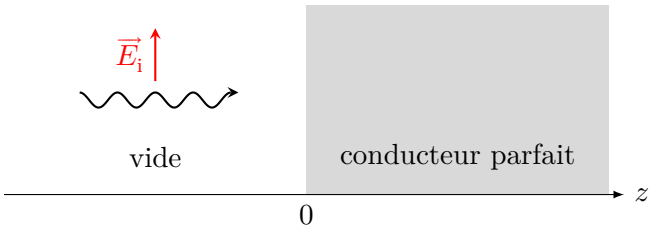
Électromagnétisme – Chapitre 6

Ondes électromagnétiques – TD

Exercice 1 : Propagation et réflexion de l'énergie en représentation complexe

On considère une OPPM électromagnétique dans le demi-espace vide $z < 0$ qui se propage dans le sens des z croissants et qui est polarisée rectilignement dans la direction $\vec{e}_x$. Elle arrive en incidence normale sur un conducteur parfait occupant le demi-espace $z > 0$, comme représenté ci-dessous.



On s'intéresse dans un premier temps à la propagation de l'onde incidente dans le vide, dont on suppose que le champ électrique s'exprime en représentation complexe :

$$\underline{\overrightarrow{E}}_i(M,t) = E_0\, e^{j(\omega t - k z)}\, \vec{e}_x$$

avec $\vec{k}_i = k\,\vec{e}_z = \dfrac{\omega}{c_0}\,\vec{e}_z$ son vecteur d'onde.

1. Exprimer le champ magnétique $\underline{\overrightarrow{B}}_i(M,t)$ de l'onde incidente en représentation complexe.

On rappelle que la moyenne temporelle du produit de deux fonctions sinusoïdales $f(t)$ et $g(t)$ peut s'exprimer à partir de leur représentation complexe $\underline{f}$ et $\underline{g}$ en utilisant la formule :

$$\langle f(t) \times g(t) \rangle = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\underline{f} \times \underline{g}^*\right\}$$

avec $\underline{g}^*$ le complexe conjugué de $\underline{g}$.

2. En déduire l'expression de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting de l'onde incidente.

On suppose désormais qu'il existe également une onde réfléchie dans le demi-espace vide $z < 0$, qui se propage dans le sens des z décroissants, et dont le champ électrique s'exprime en représentation complexe :

$$\underline{\overrightarrow{E}}_r(M,t) = \underline{E}'_0\, e^{j(\omega t + k z)}\, \vec{e}_x$$

avec $\underline{E}'_0$ une amplitude complexe.

3. Sachant que le champ électrique est continu à l'interface avec le conducteur, déterminer l'amplitude complexe $\underline{E}'_0$.

4. Exprimer le champ magnétique $\underline{\overrightarrow{B}}_r(M,t)$ de l'onde réfléchie en représentation complexe.

5. En déduire l'expression de la moyenne temporelle du vecteur de Poynting de l'onde réfléchie, puis commenter le résultat obtenu.

Correction :

1. Le champ magnétique de l'onde incidente s'exprime à l'aide de la relation de structure : $\underline{\overrightarrow{B}}_i(M,t) = \dfrac{\vec{k}_i \wedge \underline{\overrightarrow{E}}_i}{\omega} = \dfrac{E_0}{c_0}\, e^{j(\omega t - k z)}\, \vec{e}_y$.

2. On exprime la moyenne temporelle du vecteur de Poynting de l'onde incidente en utilisant la formule donnée : $\left\langle \overrightarrow{R}_i \right\rangle = \left\langle \dfrac{\overrightarrow{E}_i \wedge \overrightarrow{B}_i}{\mu_0} \right\rangle = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{ \dfrac{\overrightarrow{E}_i \wedge \overrightarrow{B}_i^*}{\mu_0} \right\} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{ \dfrac{E_0^2}{\mu_0\, c_0}\,\vec{e}_z \right\} = \dfrac{E_0^2}{2\,\mu_0\, c_0}\,\vec{e}_z$.

3. Le champ électrique résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie dans le

demi-espace vide est : $\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = \underline{\overrightarrow{E}}_\text{i} + \underline{\overrightarrow{E}}_\text{r} = \left[E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t-k\,z)} + \underline{E}'_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t+k\,z)}\right]\vec{e}_x$.
Comme le champ électrique à l'intérieur du conducteur parfait est nul, et que celui-ci est continu à l'interface avec le conducteur, on en déduit que : $\underline{\overrightarrow{E}}(z=0,t) = \vec{0}$, soit : $E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t)} + \underline{E}'_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t)} = 0$, d'où : $\underline{E}'_0 = -E_0$.

4. Le champ magnétique de l'onde réfléchie s'exprime à l'aide de la relation de structure : $\underline{\overrightarrow{B}}_\text{r}(M,t) = \dfrac{\vec{k}_\text{r} \wedge \underline{\overrightarrow{E}}_\text{r}}{\omega}$, avec $\vec{k}_\text{r} = -k\,\vec{e}_z = -\dfrac{\omega}{c_0}\,\vec{e}_z$ son vecteur d'onde, soit : $\underline{\overrightarrow{B}}_\text{r}(M,t) = \dfrac{E_0}{c_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega\,t+k\,z)}\vec{e}_y$.

5. On exprime la moyenne temporelle du vecteur de Poynting de l'onde réfléchie en utilisant la formule donnée : $\left\langle\overrightarrow{R}_\text{r}\right\rangle = \left\langle\dfrac{\overrightarrow{E}_\text{r}\wedge\overrightarrow{B}_\text{r}}{\mu_0}\right\rangle = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\dfrac{\underline{\overrightarrow{E}}_\text{r}\wedge\underline{\overrightarrow{B}}^*_\text{r}}{\mu_0}\right\} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{-\dfrac{E_0^2}{\mu_0\,c_0}\,\vec{e}_z\right\} = -\dfrac{E_0^2}{2\,\mu_0\,c_0}\,\vec{e}_z$.
On remarque que $\left\langle\overrightarrow{R}_\text{r}\right\rangle = -\left\langle\overrightarrow{R}_\text{i}\right\rangle$, l'énergie de l'onde incidente est donc totalement réfléchie sur la surface du conducteur parfait.

Exercice 2 : Vecteur de Poynting d'une onde stationnaire

On étudie une onde électromagnétique stationnaire dans le vide, dont le champ électrique s'exprime :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E_0\cos(\omega\,t)\sin(k\,z)\,\vec{e}_x.$$

1. Cette onde est-elle plane ?
2. Cette onde est-elle monochromatique ?
3. Établir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide à l'aide des équations de Maxwell.
4. En déduire la relation entre le vecteur d'onde k, la pulsation ω, et les constantes μ_0 et ε_0 pour cette onde.
5. Déterminer l'expression du champ magnétique associé à cette onde, sachant que sa moyenne temporelle est nulle.
6. Déterminer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting associé à cette onde, puis commenter le résultat obtenu.

Correction :

1. Cette onde est plane car le champ $\overrightarrow{E}(M,t)$ ne dépend que de la coordonnée z.

2. Cette onde est monochromatique car elle ne présente qu'une seule pulsation ω.

3. On utilise la relation d'analyse vectorielle : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}\right) - \Delta\overrightarrow{E}$, avec $\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right) = -\varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}$, soit : $-\varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = -\Delta\overrightarrow{E}$, d'où on en déduit l'équation de propagation du champ électrique : $\Delta\overrightarrow{E} - \varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

4. On peut exprimer :

- $\Delta\overrightarrow{E} = \dfrac{\partial^2 E}{\partial z^2}\,\vec{e}_x = -k^2\,E_0\cos(\omega\,t)\sin(k\,z)\,\vec{e}_x = -k^2\,\overrightarrow{E}$;
- $\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = -\omega^2\,E_0\cos(\omega\,t)\sin(k\,z)\,\vec{e}_x = -\omega^2\,\overrightarrow{E}$;

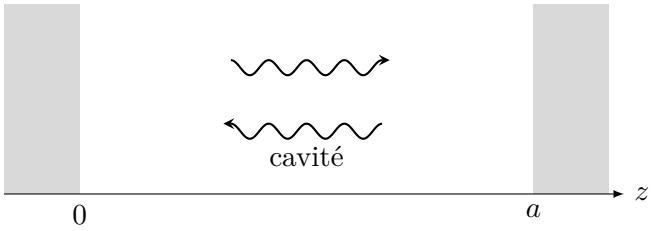
l'équation de propagation donne alors : $-k^2\,\overrightarrow{E} - \varepsilon_0\,\mu_0\left(-\omega^2\,\overrightarrow{E}\right) = \vec{0}$, d'où : $k^2 = \varepsilon_0\,\mu_0\,\omega^2$.

5. Comme l'onde n'est pas une OPPM, il n'est pas possible d'utiliser la relation de structure $\overrightarrow{B} = \dfrac{\vec{k}\wedge\overrightarrow{E}}{\omega}$.
On utilise l'équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$, avec $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = \dfrac{\partial E}{\partial z}\,\vec{e}_y = k\,E_0\cos(\omega\,t)\cos(k\,z)\,\vec{e}_y$, soit : $k\,E_0\cos(\omega\,t)\cos(k\,z)\,\vec{e}_y = -\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$, d'où en intégrant par rapport au temps : $\overrightarrow{B}(M,t) = -\dfrac{k\,E_0}{\omega}\sin(\omega\,t)\cos(k\,z)\,\vec{e}_y$ (avec une constante d'intégration nulle puisque la moyenne temporelle du champ est nulle).

6. Le vecteur de Poynting s'exprime : $\overrightarrow{R} = \dfrac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} = -\dfrac{k\,E_0^2}{\omega} \cos(\omega\,t) \sin(\omega\,t) \cos(k\,z) \sin(k\,z)\,\vec{e}_z$, et on en déduit sa moyenne temporelle : $\left\langle \overrightarrow{R} \right\rangle = -\dfrac{k\,E_0^2}{\omega} \langle \cos(\omega\,t) \sin(\omega\,t) \rangle \cos(k\,z) \sin(k\,z)\,\vec{e}_z = \vec{0}$.
L'onde étant stationnaire, son énergie ne se propage pas, et le vecteur de Poynting associé est nul en moyenne.

Exercice 3 : Résolution de l'équation de d'Alembert dans une cavité résonante

On considère une cavité vide creusée dans un conducteur parfait, entre les plans $z = 0$ et $z = a$, à l'intérieur de laquelle il existe une onde électromagnétique en régime stationnaire.



Les réflexions successives de cette onde entre les deux parois du conducteur impliquent que l'onde résultante doit avoir la structure d'une onde stationnaire, dont on suppose que le champ électrique s'exprime de la forme :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = f(z)\,g(t)\,\vec{e}_x$$

avec $f(z)$ et $g(t)$ des fonctions.

1. À l'aide des équations de Maxwell dans le vide, établir l'équation de d'Alembert vérifiée par le champ électrique en faisant apparaitre c_0 la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide.

2. Sachant que le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert dans la cavité, montrer que les fonctions $f(z)$ et $g(t)$ vérifient l'équation différentielle :

$$-c_0^2\,\frac{1}{f(z)}\,\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{1}{g(t)}\,\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2}.$$

Comme les fonctions $f(z)$ et $g(t)$ sont indépendantes l'un de l'autre et que le champ électrique dans la cavité ne peut pas diverger, on peut montrer que les deux membres de cette équation différentielle sont égaux à une constante positive que l'on note ω^2 pour la suite.

3. En déduire la forme des solutions pour les fonctions $f(z)$ et $g(t)$.

On rappelle que la relation de passage du champ électrique implique que celui-ci est continu sur les parois du conducteur.

4. Montrer que la constante ω est alors quantifiée, puis donner la forme d'un champ électrique de mode propre n dans la cavité.

Correction :

1. On utilise la relation d'analyse vectorielle : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}\right) - \Delta\overrightarrow{E}$, avec $\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(-\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right) = -\varepsilon_0\,\mu_0\,\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = -\dfrac{1}{c_0^2}\,\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}$, soit : $-\dfrac{1}{c_0^2}\,\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = -\Delta\overrightarrow{E}$, d'où l'équation de d'Alembert vérifiée par le champ électrique : $\Delta\overrightarrow{E} - \dfrac{1}{c_0^2}\,\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

2. Avec l'expression du champ électrique dans la cavité, on obtient : $\Delta\overrightarrow{E} = \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}\,g(t)\,\vec{e}_x$ et $\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = f(z)\,\dfrac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{e}_x$. L'équation de d'Alembert donne alors : $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}\,g(t)\,\vec{e}_x - \dfrac{1}{c_0^2}\,f(z)\,\dfrac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{e}_x = \vec{0}$, d'où : $-c_0^2\,\dfrac{1}{f(z)}\,\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} = -\dfrac{1}{g(t)}\,\dfrac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2}$.

3. Comme $-c_0^2 \dfrac{1}{f(z)} \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} = \omega^2$, la fonction $f(z)$ vérifie l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique : $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} + \dfrac{\omega^2}{c_0^2} f(z) = 0$, dont la solution peut s'exprimer de la forme : $f(z) = A_1 \cos\left(\dfrac{\omega}{c_0} z\right) + A_2 \sin\left(\dfrac{\omega}{c_0} z\right)$.

Comme $-\dfrac{1}{g(t)} \dfrac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} = \omega^2$, la fonction $g(t)$ vérifie l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique : $\dfrac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 g(t) = 0$, dont la solution peut s'exprimer de la forme : $g(t) = B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)$.

4. Comme le champ électrique à l'intérieur du conducteur parfait est nul, et que celui-ci est continu sur les parois du conducteur, on obtient les conditions aux limites :

- $\vec{E}(z=0,t) = \vec{0}$, d'où : $f(0) = 0$, soit : $A_1 = 0$;
- $\vec{E}(z=a,t) = \vec{0}$, d'où : $f(a) = 0$, soit : $A_2 \sin\left(\dfrac{\omega}{c_0} a\right) = 0$, et on en déduit que ω ne peut prendre que les valeurs $\omega_n = \dfrac{n \pi c_0}{a}$, avec n un entier.

La forme d'un champ électrique de mode propre n dans la cavité est donc : $\vec{E}(M,t) = A_2 \sin\left(\dfrac{n\pi}{a} z\right) \left[B_1 \cos\left(\dfrac{n \pi c_0}{a} t\right) + B_2 \sin\left(\dfrac{n \pi c_0}{a} t\right)\right] \vec{e}_x$.

Exercice 4 : Puissance rayonnée par une onde sphérique

Une source ponctuelle émet une onde électromagnétique sphérique dans le vide, dont le champ électrique s'exprime en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(M,t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - k r)\, \vec{e}_\theta$$

avec A une constante et $\vec{k} = k\,\vec{e}_r = \dfrac{\omega}{c_0}\,\vec{e}_r$ le vecteur d'onde, où c_0 est la célérité de la lumière dans le vide.

On admet que l'opérateur laplacien appliqué au champ électrique peut s'exprimer à grande distance de la source :

$$\Delta \vec{E} \approx \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} \right).$$

1. À grande distance de la source, montrer que le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert.

2. Sachant que le champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ à grande distance de la source s'exprime en fonction de $\vec{E}(M,t)$ et de $\vec{k}$ de la même façon que pour une OPPM dans le vide, déterminer son expression.

3. En déduire l'expression du vecteur de Poynting associé à cette onde, puis sa valeur moyenne.

4. Déterminer l'expression de la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon a centrée en O à grande distance de la source.

Correction :

1. On exprime d'une part : $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial r} = \left[k \dfrac{A}{r} \sin(\omega t - k r) - \dfrac{A}{r^2} \cos(\omega t - k r)\right] \vec{e}_\theta$, d'où : $\Delta \vec{E} \approx \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial r}\right] = \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial}{\partial r} \left[r\,k\,A \sin(\omega t - k r) - A \cos(\omega t - k r)\right] \vec{e}_\theta$, soit : $\Delta \vec{E} = \dfrac{1}{r^2} \left[k\,A \sin(\omega t - k r) - r\,k^2\,A \cos(\omega t - k r) - k\,A \sin(\omega t - k r)\right] \vec{e}_\theta = -k^2 \dfrac{A}{r} \cos(\omega t - k r)\, \vec{e}_\theta$.

On exprime d'autre part : $\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \dfrac{A}{r} \cos(\omega t - k r)\, \vec{e}_\theta$.

Comme $\Delta \vec{E} - \dfrac{1}{c_0^2} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$, l'équation de d'Alembert est bien vérifiée à grande distance de la source.

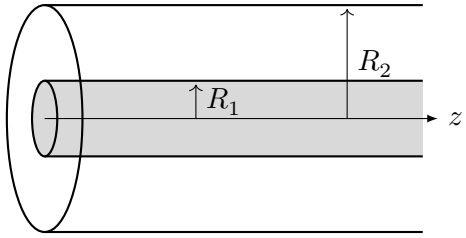
2. À grande distance de la source, le champ magnétique peut s'exprimer à l'aide de la relation de structure : $\vec{B}(M,t) = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \dfrac{A}{c_0\, r} \cos(\omega t - k r)\, \vec{e}_\varphi$.

3. Le vecteur de Poynting s'exprime : $\overrightarrow{R} = \dfrac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} = \dfrac{A^2}{\mu_0\, c_0\, r^2} \cos^2(\omega\, t - k\, r)\, \vec{e}_r$, et on en déduit sa valeur moyenne : $\left\langle \overrightarrow{R} \right\rangle = \dfrac{A^2}{\mu_0\, c_0\, r^2} \left\langle \cos^2(\omega\, t - k\, r) \right\rangle \vec{e}_r = \dfrac{A^2}{2\, \mu_0\, c_0\, r^2}\, \vec{e}_r$.

4. La puissance moyenne rayonnée s'exprime : $\left\langle P_{\text{ray}} \right\rangle = \oiint_S \left\langle \overrightarrow{R} \right\rangle \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \langle R(a) \rangle \oiint_S \mathrm{d}S = \dfrac{A^2}{2\, \mu_0\, c_0\, a^2}\, 4\, \pi\, a^2 = \dfrac{2\, \pi\, A^2}{\mu_0\, c_0}$.

Exercice 5 : Propagation dans un câble coaxial

On considère un câble coaxial constitué d'un fil de cuivre cylindrique d'axe (Oz) et de rayon R_1, contenu dans une gaine en cuivre d'épaisseur négligeable et de rayon R_2, comme représenté ci-dessous.



On suppose qu'une onde électromagnétique se propage le long du câble dans l'isolant compris entre $r = R_1$ et $r = R_2$, que l'on assimile au vide. Le champ électrique de cette onde s'écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E(r) \cos(\omega\, t - k\, z)\, \vec{e}_r$$

avec $E(r = R_1) = E_0$.

On rappelle l'expression des opérateurs en coordonnées cylindriques :

- $\operatorname{div} \overrightarrow{A} = \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial (r\, A_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$
- $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{A} = \left(\dfrac{1}{r} \dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r} \left(\dfrac{\partial (r\, A_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$.

1. Déterminer l'expression de l'amplitude $E(r)$ du champ électrique.

2. En déduire l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$ en supposant que celui-ci ne présente pas de composante continue.

3. Exprimer la puissance moyenne transportée à travers une section du câble.

4. Exprimer la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique dans l'isolant.

5. En déduire la vitesse de propagation de l'énergie dans le câble.

Correction :

1. Le champ électrique vérifie l'équation de Maxwell-Gauss dans le vide : $\operatorname{div} \overrightarrow{E} = 0$, soit : $\dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \left[r\, E(r) \cos(\omega\, t - k\, z) \right]}{\partial r} = 0$, d'où : $\dfrac{\mathrm{d}\left[r\, E(r) \right]}{\mathrm{d}r} = 0$, et on en déduit que : $E(r) = \dfrac{A}{r}$, avec A une constante que l'on détermine à l'aide de la condition à la limite : $E(r = R_1) = E_0 = \dfrac{A}{R_1}$, d'où : $A = R_1\, E_0$, et on obtient finalement : $E(r) = \dfrac{R_1\, E_0}{r}$.

2. On ne peut pas utiliser la relation de structure comme il ne s'agit pas d'une OPPM.

Le champ magnétique vérifie l'équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$, soit : $\dfrac{\partial \left[E(r) \cos(\omega\, t - k\, z) \right]}{\partial z}\, \vec{e}_\theta = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$, d'où : $\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = -\dfrac{k\, R_1\, E_0}{r} \sin(\omega\, t - k\, z)\, \vec{e}_\theta$, et on en déduit l'expression du champ en supposant que celui-ci ne présente pas de composante continue : $\overrightarrow{B}(M,t) = \dfrac{k\, R_1\, E_0}{\omega\, r} \cos(\omega\, t - k\, z)\, \vec{e}_\theta$.

3. La moyenne du vecteur de Poynting est : $\left\langle \overrightarrow{R} \right\rangle = \left\langle \dfrac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} \right\rangle = \dfrac{k\,R_1^2\,E_0^2}{\mu_0\,\omega\,r^2}\,\langle \cos^2(\omega\,t - k\,z)\rangle\,\vec{e}_z = \dfrac{k\,R_1^2\,E_0^2}{2\,\mu_0\,\omega\,r^2}\,\vec{e}_z$.
La puissance moyenne transportée à travers une section du câble est alors : $\langle P \rangle = \displaystyle\iint_{\text{section}} \left\langle \overrightarrow{R} \right\rangle \cdot (\mathrm{d}S\,\vec{e}_z) = \int_{r=R_1}^{R_2} \int_{\theta=0}^{2\,\pi} \frac{k\,R_1^2\,E_0^2}{2\,\mu_0\,\omega\,r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi\,k\,R_1^2\,E_0^2}{\mu_0\,\omega} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\pi\,k\,R_1^2\,E_0^2}{\mu_0\,\omega} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$.

4. La densité volumique d'énergie électromagnétique dans l'isolant est : $u = \dfrac{1}{2}\,\varepsilon_0\,\overrightarrow{E}^2 + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\overrightarrow{B}^2}{\mu_0} = \dfrac{R_1^2\,E_0^2}{2\,r^2}\cos^2(\omega\,t - k\,z)\left(\varepsilon_0 + \dfrac{k^2}{\mu_0\,\omega^2}\right)$, et on en déduit sa moyenne : $\langle u \rangle = \dfrac{R_1^2\,E_0^2}{2\,r^2}\,\langle \cos^2(\omega\,t - k\,z)\rangle \left(\varepsilon_0 + \dfrac{k^2}{\mu_0\,\omega^2}\right) = \dfrac{R_1^2\,E_0^2}{4\,r^2}\left(\varepsilon_0 + \dfrac{k^2}{\mu_0\,\omega^2}\right)$.

5. L'énergie qui traverse une section du câble pendant $\mathrm{d}t$ est comprise dans le tronçon précédent de longueur $v_\mathrm{p}\,\mathrm{d}t$, avec v_p la vitesse de propagation de l'énergie. Elle peut alors s'exprimer : $\mathrm{d}E = \langle P \rangle\,\mathrm{d}t = \displaystyle\iint_{\text{section}} \langle u \rangle\,\mathrm{d}S\,v_\mathrm{p}\,\mathrm{d}t$, avec $\displaystyle\iint_{\text{section}} \langle u \rangle\,\mathrm{d}S = \int_{r=R_1}^{R_2} \int_{\theta=0}^{2\,\pi} \frac{R_1^2\,E_0^2}{4\,r^2}\left(\varepsilon_0 + \frac{k^2}{\mu_0\,\omega^2}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi\,R_1^2\,E_0^2}{2}\left(\varepsilon_0 + \frac{k^2}{\mu_0\,\omega^2}\right)\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$, soit : $\dfrac{\pi\,k\,R_1^2\,E_0^2}{\mu_0\,\omega}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)\mathrm{d}t = \dfrac{\pi\,R_1^2\,E_0^2}{2}\left(\varepsilon_0 + \dfrac{k^2}{\mu_0\,\omega^2}\right)\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right) v_\mathrm{p}\,\mathrm{d}t$, d'où finalement : $v_\mathrm{p} = \dfrac{2\,k\,\omega}{\varepsilon_0\,\mu_0\,\omega^2 + k^2}$.

Exercice 6 : Réflexion et transmission à l'interface de deux milieux isolants

Les propriétés électromagnétiques d'un milieu isolant et non chargé sont semblables à celles du vide, à condition de remplacer la permittivité du vide ε_0 par la permittivité du milieu $\varepsilon = \varepsilon_0\,\varepsilon_\mathrm{r}$, où ε_r est la permittivité relative du milieu. L'indice optique d'un tel milieu est défini tel que :

$$n = \sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}.$$

1. Établir l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu isolant et non chargé.

2. En déduire l'expression de la célérité des ondes électromagnétiques dans ce milieu en fonction de son indice optique n et de la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide c_0.

On considère une onde électromagnétique incidente qui se propage dans un milieu d'indice optique n_1 occupant le demi-espace $x < 0$. On étudie sa réflexion et sa transmission à l'interface avec un milieu d'indice optique n_2 occupant le demi-espace $x > 0$. On suppose que les champs électriques de l'onde incidente, de l'onde réfléchie et de l'onde transmise s'expriment respectivement :

$$\begin{cases} \overrightarrow{E_\mathrm{i}}(M,t) = E_0 \cos(\omega\,t - k_\mathrm{i}\,x)\,\vec{e}_y \\ \overrightarrow{E_\mathrm{r}}(M,t) = \rho\,E_0 \cos(\omega\,t + k_\mathrm{r}\,x)\,\vec{e}_y \\ \overrightarrow{E_\mathrm{t}}(M,t) = \tau\,E_0 \cos(\omega\,t - k_\mathrm{t}\,x)\,\vec{e}_y \end{cases}$$

avec ρ et τ les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.

3. Préciser la polarisation de ces ondes.

4. Exprimer le vecteur d'onde associé à chaque onde en fonction de ω, c_0 et n_1 ou n_2.

5. Exprimer le champ magnétique associé à chaque onde.

On peut montrer que les champs électriques et magnétiques sont continues à cette interface.

6. En déduire l'expression des coefficients ρ et τ en fonction de n_1 et n_2.

7. Exprimer la moyenne du vecteur de Poynting associé à chaque onde.

8. En déduire l'expression des coefficients de réflexion et de transmission en énergie, notés respectivement R et T, en fonction de n_1 et n_2.

Un faisceau laser de puissance $P = 625\,\mathrm{mW}$ est envoyé depuis l'air sur un bloc en verre d'indice optique $n_\mathrm{v} = 1{,}50$ en incidence normale.

9. Déterminer la puissance du faisceau laser dans le verre.

Correction :

1. On utilise la relation d'analyse vectorielle : $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\overrightarrow{E}\right) - \Delta\overrightarrow{E}$, avec $\text{div}\,\overrightarrow{E} = 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\,\mu_0\,\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right) = -\varepsilon\,\mu_0\,\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}$, soit : $-\varepsilon\,\mu_0\,\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = -\Delta\overrightarrow{E}$, d'où on en déduit l'équation de propagation du champ électrique : $\Delta\overrightarrow{E} - \varepsilon\,\mu_0\,\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

2. La célérité des ondes électromagnétiques dans ce milieu est : $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\,\varepsilon}} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0\,\varepsilon_\text{r}}} = \dfrac{c_0}{n}$.

3. Les trois ondes sont polarisées rectilignement dans la direction $\vec{e}_y$.

4. Les trois ondes étant des OPPM, les vecteurs d'onde s'expriment : $\vec{k}_\text{i} = \dfrac{\omega}{c_1}\,\vec{e}_x = \dfrac{n_1\,\omega}{c_0}\,\vec{e}_x$, $\vec{k}_\text{r} = -\dfrac{n_1\,\omega}{c_0}\,\vec{e}_x$ et $\vec{k}_\text{t} = \dfrac{n_2\,\omega}{c_0}\,\vec{e}_x$.

5. Les champs magnétiques peuvent s'exprimer à l'aide de la relation de structure :

- $\overrightarrow{B}_\text{i}(M,t) = \dfrac{\vec{k}_\text{i}\wedge\overrightarrow{E}_\text{i}}{\omega} = \dfrac{n_1\,E_0}{c_0}\cos\left(\omega\,t - k_\text{i}\,x\right)\vec{e}_z$;
- $\overrightarrow{B}_\text{r}(M,t) = \dfrac{\vec{k}_\text{r}\wedge\overrightarrow{E}_\text{r}}{\omega} = -\dfrac{n_1\,\rho\,E_0}{c_0}\cos\left(\omega\,t + k_\text{r}\,x\right)\vec{e}_z$;
- $\overrightarrow{B}_\text{t}(M,t) = \dfrac{\vec{k}_\text{t}\wedge\overrightarrow{E}_\text{t}}{\omega} = \dfrac{n_2\,\tau\,E_0}{c_0}\cos\left(\omega\,t - k_\text{t}\,x\right)\vec{e}_z$.

6. Le champ électrique étant continu à l'interface $x = 0$, on obtient : $\overrightarrow{E}_\text{i}(x=0,t) + \overrightarrow{E}_\text{r}(x=0,t) = \overrightarrow{E}_\text{t}(x=0,t)$, soit : $E_0\cos\left(\omega\,t\right)\vec{e}_y + \rho\,E_0\cos\left(\omega\,t\right)\vec{e}_y = \tau\,E_0\cos\left(\omega\,t\right)\vec{e}_y$, d'où : $1+\rho=\tau$.

Le champ magnétique étant continu à l'interface $x = 0$, on obtient : $\overrightarrow{B}_\text{i}(x=0,t) + \overrightarrow{B}_\text{r}(x=0,t) = \overrightarrow{B}_\text{t}(x=0,t)$, soit : $\dfrac{n_1\,E_0}{c_0}\cos\left(\omega\,t\right)\vec{e}_z - \dfrac{n_1\,\rho\,E_0}{c_0}\cos\left(\omega\,t\right)\vec{e}_z = \dfrac{n_2\,\tau\,E_0}{c_0}\cos\left(\omega\,t\right)\vec{e}_z$, d'où : $n_1\left(1-\rho\right) = n_2\,\tau$.

En utilisant la première relation dans la seconde, on obtient : $n_1\left(1-\rho\right) = n_2\left(1+\rho\right)$, d'où : $\rho = \dfrac{n_1-n_2}{n_1+n_2}$, et on en déduit : $\tau = 1+\rho = \dfrac{2\,n_1}{n_1+n_2}$.

7. La moyenne du vecteur de Poynting pour chaque onde s'exprime :

- $\left\langle\overrightarrow{R}_\text{i}(M,t)\right\rangle = \left\langle\dfrac{\overrightarrow{E}_\text{i}\wedge\overrightarrow{B}_\text{i}}{\mu_0}\right\rangle = \dfrac{n_1\,E_0^2}{c_0\,\mu_0}\left\langle\cos^2\left(\omega\,t - k_\text{i}\,x\right)\right\rangle\vec{e}_x = \dfrac{n_1\,E_0^2}{2\,c_0\,\mu_0}\,\vec{e}_x$;
- $\left\langle\overrightarrow{R}_\text{r}(M,t)\right\rangle = \left\langle\dfrac{\overrightarrow{E}_\text{r}\wedge\overrightarrow{B}_\text{r}}{\mu_0}\right\rangle = -\dfrac{n_1\,\rho^2\,E_0^2}{c_0\,\mu_0}\left\langle\cos^2\left(\omega\,t + k_\text{r}\,x\right)\right\rangle\vec{e}_x = -\dfrac{n_1\,\rho^2\,E_0^2}{2\,c_0\,\mu_0}\,\vec{e}_x$;
- $\left\langle\overrightarrow{R}_\text{t}(M,t)\right\rangle = \left\langle\dfrac{\overrightarrow{E}_\text{t}\wedge\overrightarrow{B}_\text{t}}{\mu_0}\right\rangle = \dfrac{n_2\,\tau^2\,E_0^2}{c_0\,\mu_0}\left\langle\cos^2\left(\omega\,t - k_\text{t}\,x\right)\right\rangle\vec{e}_x = \dfrac{n_2\,\tau^2\,E_0^2}{2\,c_0\,\mu_0}\,\vec{e}_x$.

8. Le coefficient de réflexion en énergie correspond au rapport : $R = \dfrac{\left\|\left\langle\overrightarrow{R}_\text{r}(M,t)\right\rangle\right\|}{\left\|\left\langle\overrightarrow{R}_\text{i}(M,t)\right\rangle\right\|} = \rho^2 = \left(\dfrac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2$.

Le coefficient de transmission en énergie correspond au rapport : $T = \dfrac{\left\|\left\langle\overrightarrow{R}_\text{t}(M,t)\right\rangle\right\|}{\left\|\left\langle\overrightarrow{R}_\text{i}(M,t)\right\rangle\right\|} = \dfrac{n_2\,\tau^2}{n_1} = \dfrac{4\,n_1\,n_2}{\left(n_1+n_2\right)^2}$.

9. La puissance du faisceau laser dans le verre est : $P_\text{v} = T\,P = \dfrac{4\,n_\text{air}\,n_\text{v}}{\left(n_\text{air}+n_\text{v}\right)^2}\,P = 600\,\text{mW}$.